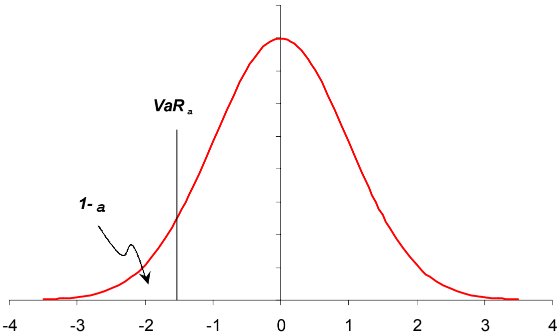
MEDICIÓN DEL RIESGO DE MERCADO: PROBLEMAS EN LA PRÁCTICA (II)

En esta charla, mi interés va a ser sembrar dudas, desde luego no por el placer de desorientar o de desconcertar, más bien trataré de sembrar dudas con la sana intención de identificar algunas de las fronteras actuales en la medición de riesgos y tratando en cualquier caso de iluminar la dirección futura que pienso se va a seguir.

En mi opinión, un asunto se empieza realmente a conocer cuando se empiezan a identificar sus fronteras, sus límites, y de eso voy a hablar, de las fronteras en la medición de los riesgos de mercado. Creo que identificar las fronteras nos permitirá sobre todo saber en todo momento donde estamos... porque para saber donde queremos ir, antes debemos saber donde estamos.

Asumo que todo el mundo conoce qué es el riesgo de mercado, qué es el valor en riesgo (VaR), todos hemos oído hablar de RiskMetrics™, de volatilidades, de matrices de correlaciones, de matrices de varianzas y covarianzas, de niveles de confianza, de horizontes temporales, de la regla de la raíz cuadrada...



El concepto del VaR

Sin embargo tengo la impresión de que no sabemos hasta que punto muchos de estos conceptos sólo tienen sentido en función de determinados supuestos que implícitamente[1] estamos asumiendo, y es que en determinados casos algunos de los conceptos anteriores simplemente no existen, en otros adquieren otro sentido…

En esta presentación voy a explicar mi punto de vista sobre las siguientes cuestiones:

- ¿Son los rendimientos de las series financieras normales? ¿Se pueden modelizar como procesos brownianos? ¿Qué importancia, para la medición de riesgos, puede tener que no sean normales?.
- ¿Qué es la correlación? ¿Cómo se debe usar? Veremos que curiosamente esto es algo que tiene mucho que ver con el supuesto de normalidad.
- ¿Hay alternativas al VaR paramétrico? ¿Es la simulación de Montecarlo una alternativa razonable? ¿Qué podemos decir de la simulación histórica?.
- ¿Qué es el riesgo de modelo? ¿Es importante? ¿Cómo podemos medirlo?.
- ¿Es realmente el VaR una buena medida del riesgo? ¿Existen otras alternativas? ¿Qué es el shortfall?.
- ¿Existen las volatilidades y las correlaciones? Este último punto nos ayudará a reflexionar seriamente sobre hasta que punto los supuestos implícitos que hay en los modelos, se convierten en algo más que supuestos, y como pueden afectar al sentido de los resultados que se obtienen.

[1] En este documento voy a tratar de hacer explícitos algunos de esos supuestos implícitos.

LA NORMALIDAD DE LOS RENDIMIENTOS

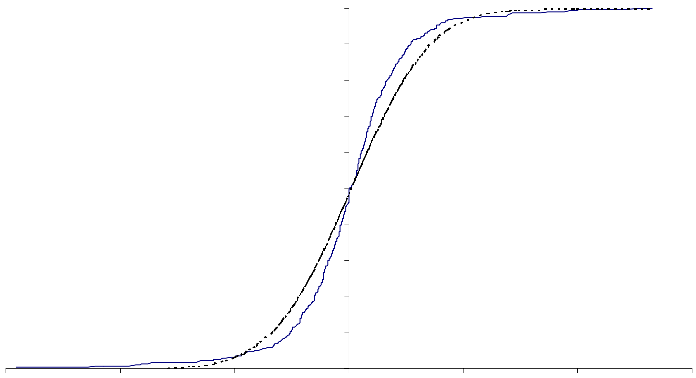
No creo que haya que convencer a nadie de que las series de los rendimientos de los activos financieros no son normales. Todos sabemos ya que no lo son, y que se usa la normal básicamente porque:

- Aproxima bastante bien.
- Permite calcular de forma analítica.

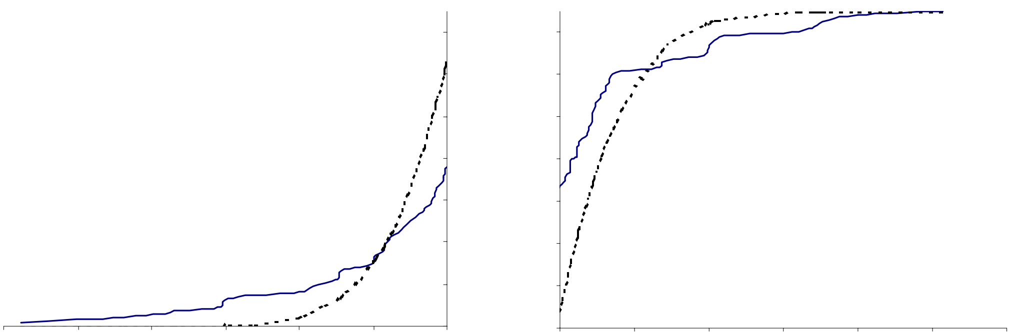
Es cierto que el supuesto de normalidad facilita los cálculos, más matizable es la afirmación de que la normal ajusta bastante bien. ¿Qué significa aproximar bastante bien? Yo diría que una función de densidad paramétrica aproxima bien a unos datos empíricos cuando las densidades acumuladas, de la función y de los datos empíricos, son coincidentes. ¿Es este el caso de la normal? No, no lo es, al menos en tres zonas, en la zona de rendimientos muy negativos, en la de rendimientos muy positivos y también para rendimientos cercanos a cero. Una distribución como la que se ha descrito se dice que es leptocúrtica (de cuerpo estrecho y colas gruesas).

¿Cómo de importante, a la hora de medir riesgos es esto de que los rendimientos sean leptocúrticos? Pues es bastante importante, ya que la probabilidad de obtener rendimientos grandes (positivos o negativos) será mayor de lo que creemos y por tanto la estimación del VaR, usando el modelo normal, será muy optimista. Se puede ver con un ejemplo:

Rendimientos del BBVA: 2/1/98 - 17/2/2000



Distribuciones acumuladas: Muestral versus Normal



Detalle de la cola Izquierda Detalle de la cola derecha

Las colas de la distribución normal, decaen con mucha rapidez, más allá de 3σ se hacen minúsculas[2], la razón de esto estriba en la forma de la densidad normal, que decae a la velocidad de $\exp(-x^2)$.

[2] La probabilidad de obtener un dato mayor que 3σ es tan sólo de 0,135%, teóricamente, sólo 1 día de cada 3 años se observaría una pérdida superior.

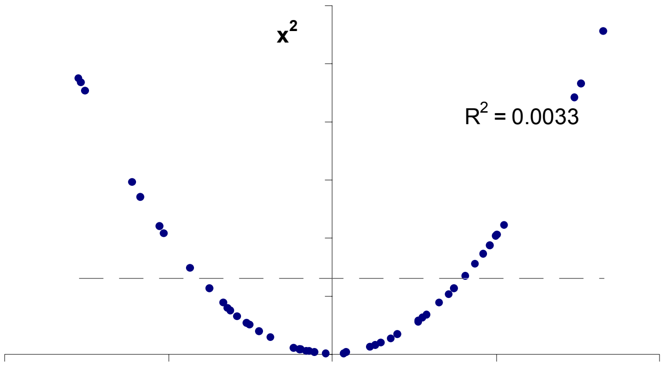
En conclusión; cuidado con los modelos normales, ya que sus estimaciones sobre el riesgo de mercado en general serán optimistas.

Alguien puede preguntar ¿Pero hay alguna alternativa?, luego trataré de responder a esa pregunta.

¿QUÉ ES LA CORRELACIÓN?

Espero haber ya sembrado una cierta sana inquietud con la discusión anterior sobre la normalidad de los rendimientos, ahora toca hablar sobre otro asunto que, sorprendentemente, tiene muchos aspectos comunes con el debate sobre la normalidad de la distribución de rendimientos.

¿Qué es la correlación?. Se tiende a identificar, erróneamente, correlación con "relación" entre variables aleatorias. Así, si la correlación entre dos activos es diferente de cero, entonces los movimientos de los activos estarán relacionados y viceversa, si la correlación es cero, entonces los movimientos de los activos no tendrán nada que ver unos con otros. Desgraciadamente el viceversa no es cierto, valga un sencillo ejemplo, sea $x \sim N(0,1)$ e $y=x^2$, entonces se puede fácilmente comprobar que $corr(x,y)=0$ y sin embargo no es cierto que x e y no estén relacionadas, de hecho están perfectamente relacionadas.



$x \sim N(0,1)$ frente a x^2

En realidad la correlación tan sólo mide el grado de relación lineal entre dos variables aleatorias. En el ejemplo anterior lo que ocurre es que la recta que mejor ajusta a los datos (cuya relación real es a través de una parábola) resulta ser una línea horizontal con correlación cero.

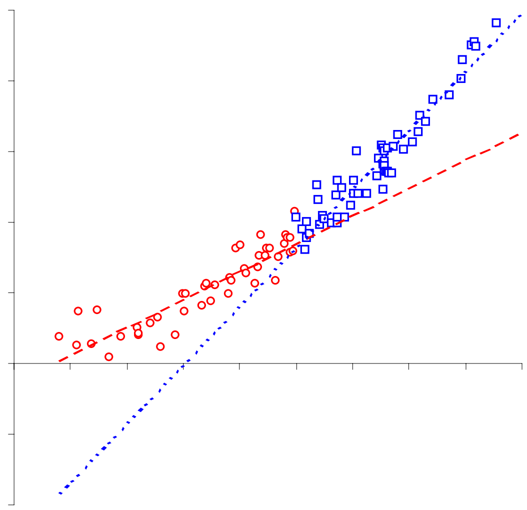
Se puede demostrar que cuando un grupo de variables aleatorias son "conjuntamente normales", esto es, su distribución conjunta es una normal multivariante, el único tipo de relación que pueden tener entre si es lineal. Podríamos decir por tanto que la correlación sólo sirve para captar las relaciones entre variables aleatorias en los siguientes dos casos:

a) Cuando las variables son conjuntamente normales.
b) Cuando la relación de las variables es lineal. (El caso anterior es un caso particular de este).

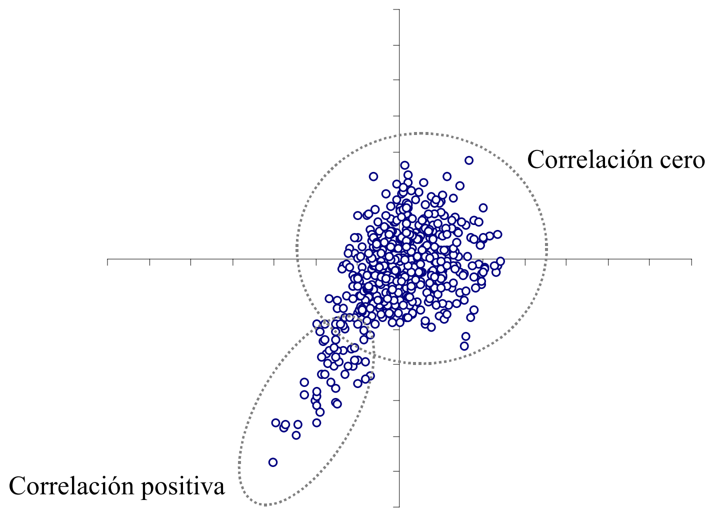
¿Pero qué pasa si las variables aleatorias no son conjuntamente normales? En tal caso, la correlación sólo será un buen indicador del grado de relación entre ellas si dicha relación es lineal. ¿Es lineal la relación entre los factores de mercado? Si tuviera que apostar diría que no y que en general, el tipo de relación que pueden tener los factores de mercado entre si es mucho más rico y complicado que la relación lineal.

En el caso general las "correlaciones" pueden ser diferentes para diferentes niveles de confianza del VaR, diferentes según que los mercados estén al alza o la baja, diferentes en situaciones normales de las que se observan en escenarios de stress, ... De hecho el concepto correlación en la situación general no linealidad no es de útil.

A modo de ejemplo, en el gráfico siguiente se ve un posible comportamiento de dos activos, con alto grado de relación, que presentando igual correlación tienen diferente relación entre ellos en mercados alcistas o bajistas (este caso sería, por ejemplo, una acción cuya "beta" con el índice fuera diferente según que el mercado esté al alza o a la baja).



Otro ejemplo más es el caso de dos activos, altamente correlacionados en mercados bajistas y sin correlación en los mercados alcistas. ¿Cuál es la correlación en este caso? La respuesta es "depende", si el mercado sube la correlación es cero, si el mercado baja la correlación es positiva. El problema es que a priori no se sabe si el mercado subirá o bajará.



ALTERNATIVAS AL VaR PARAMÉTRICO

En este estado de la cuestión, para seguir empeñados en usar el supuesto de normalidad deberíamos tener unos argumentos muy, muy poderosos. Alguien preguntará,

¿Pero hay realmente alternativas al VaR paramétrico? En un plano teórico[3] y a priori parece que si, serían dos:

- VaR mediante Simulación de MonteCarlo
- VaR mediante Simulación Histórica

Haré unos breves comentarios respecto a estas técnicas, en que consisten y cuales son sus principales inconvenientes, todo ello como ya he dicho desde un punto de vista teórico.

VaR mediante simulación de Montecarlo.

La idea de este método consiste en obtener directamente la distribución de beneficios/pérdidas de una cartera de activos simulando la evolución temporal de todos factores de mercado (tipos de interés, tipos de cambio, índices bursátiles, etc...). Una vez obtenida dicha distribución, se mide el percentil en el que se está interesado... ese es el VaR.

Señalaré 3 "pequeños" inconvenientes en esta metodología:

El primer inconveniente es que para realizar la simulación de Montecarlo previamente hay que modelizar el comportamiento estocástico conjunto de todos los factores de mercado, para ello inevitablemente hay que determinar las distribuciones individuales de dichos factores y además la forma como se interrelacionan. Es habitual asumir, cómo no, comportamientos normales en la modelización y no sólo porque esto simplifique los cálculos sino principalmente porque desconocemos como son las distribuciones marginales reales de los factores individuales o las relaciones entre estas (lo que equivale a desconocer la distribución conjunta).

Pero es que aunque se conociese cual es la distribución conjunta... la generación de números aleatorios con una distribución marginal determinada es todo un reto, y ya la generación de vectores aleatorios con una distribución multivariante determinada es un reto elevado a "n" donde "n" es la dimensión del vector.

A modo de ejemplo; para generar un solo dato aleatorio para una normal multivariante de dimensión "n", se necesitan generar "n" variables aleatorias normales unidimensionales para luego multiplicarlas por una matriz de dimensión "n×n". Esta matriz se obtiene a su vez aplicando la descomposición de cholesky a la matriz de correlaciones. Además para generar una dato aleatorio de una normal univariante es recomendable generar dos datos de una distribución uniforme y utilizar, por ejemplo, el método de Box-Muller.

Desgraciadamente, cuando las distribuciones no son normales, no hay método Box-Muller ni descomposición de cholesky[4] que valga, es por ello que el supuesto de factores normales es tan habitual[5].

El segundo inconveniente está relacionado con el nivel de confianza para el que se desea calcular el VaR.

Mediante la simulación de montecarlo lo que se está buscando realmente es estimar un percentil de la distribución de variaciones de precios. Debe quedar claro que no se busca estimar toda la distribución, tan sólo un percentil, un percentil bastante extremo, 95%, 97.5%, 99% e incluso puede que superior. Buscar el percentil 99% significa que de cada

[3] No entraré en la discusión de los problemas prácticos tanto de la simulación de Montecarlo como de la simulación histórica, que desde luego existen y son importantes, baste mencionar uno; potencia de computación.

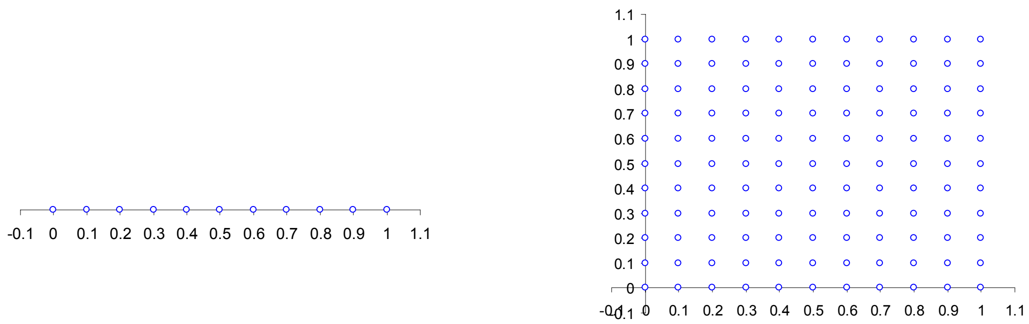
[4] Existen desde luego métodos para generar números aleatorios con la distribución conjunta que se desee, pero que dan fuera de los objetivos de esta charla.

[5] Al menos, aunque supongamos que los factores subyacentes son normales, no tenemos que hacer el mismo supuesto para el comportamiento de los productos no lineales.

1.000 escenarios que simulemos, en media sólo 10 serán escenarios con pérdidas superiores al VaR que estamos intentando estimar. De alguna forma es como si de los 1.000 escenarios, 990 no nos ayudasen y tan sólo 10 fuesen realmente útiles en la estimación. La estimación del VaR la estaríamos haciendo, en cierto sentido, con tan sólo 10 datos, por lo que el nivel de "exactitud" de nuestra estimación será muy bajo. Quiere esto decir que según sea mayor el nivel de confianza que se desee para el VaR, mayor será el numero de simulaciones (de escenarios aleatorios) que habrá que generar.

El ultimo problema quizás sea el más complejo, es el problema de la “dimensionalidad”.

Imaginemos que se desea medir el riesgo de mercado de una acción, para lo cual se generan aleatoriamente 1.000 posibles precios para dicha acción. Supongamos ahora que en lugar de una sóla acción, se tiene una cartera formada por dos acciones, si generamos nuevamente 1.000 posibles precios (escenarios) para cada una de las acciones, las posibles combinaciones son 1.000^2=1.000.000. Es decir, para garantizar una simulación con la misma la misma “densidad” de escenarios que se tenía para una sólo acción, hay que realizar el cuadrado de simulaciones.



11 Escenarios en una dimensión "equivalen" a 11^2=121 Escenarios en 2 dimensiones

¿Qué pasa para un número mayor de factores? Por ejemplo, para una cartera con tan sólo 10 factores de riesgo, habría que realizar un numero global de 1.000.000 de simulaciones para conseguir una densidad equivalente (en dimensión 10) a la de sólo 4 escenarios por cada factor(10^4=1.048.576).

10 Factores de riesgo	
Simulaciones por factor	**Total de combinaciones**
1	1
2	1,024
3	59,049
4	1,048,576
5	9,765,625
6	60,466,176
7	282,475,249
8	1,073,741,824
9	3,486,784,401
10	10,000,000,000

Habrá quien matice que esto es cierto, pero que existen técnicas que permiten reducir la dimensionalidad del problema, e inmediatamente propondrá el uso de una técnica denominada "extracción de componentes principales". Tan sólo voy a realizar una breve reflexión al respecto. La técnica de "extracción de las componentes principales, de la que soy un rotundo convencido, debe ser utilizada con extremo cuidado, ya que desgraciadamente, los componentes principales dependen de la composición de la cartera que se está analizando, no existen por tanto unos componentes principales en abstracto, útiles para todo tipo de cartera, por lo que para aplicar esta técnica hay que analizar previamente la cartera de la que se quiere estimar su riesgo.

VaR mediante simulación histórica.

Respecto a la simulación histórica hay que decir que tiene los mismos problemas relativos a la dimensionalidad y el nivel de confianza deseado. Salva, muy elegantemente, el problema de la modelización del comportamiento estocástico conjunto de los factores de riesgo, para ello usa el propio comportamiento pasado de los factores de mercado (de alguna forma estaríamos usando el histograma muestral para generar los escenarios aleatorios)[6].

¿QUÉ ES EL RIESGO DE MODELO?

Existen dos posibles definiciones:

1. Es el riesgo de realizar mediciones incorrectas del VaR debido a que dichas mediciones se basan en un modelo de riesgos que no es más que una simplificación de la realidad (supuestos de normalidad, aproximaciones para los productos no lineales, supuestos de incorrelación serial, etc.).

2. Es el riesgo de pérdidas derivadas de los modelos que se utilizan en la gestión y valoración de los productos (ocasionadas nuevamente porque también estos modelos son simplificaciones del a realidad).

La diferencia, por tanto, estriba en el tipo de modelos de los que se está hablando: Modelos para la medición del riesgo o modelos para la valoración/gestión de los productos.

Yo voy a hablar del segundo tipo de riesgo de modelo. Es habitual que los inputs del modelo de medición del riesgo (Mark to Market (MtM), sensibilidad, griegas,...) sean los outputs de los modelos de valoración/gestión. Esto conlleva unos riesgos potenciales que no se miden en el VaR.

Supongamos un modelo de valoración de derivados, llamémosle el “modelo A”. Este modelo, que es el oficial del banco, se utiliza para determinar el MtM, las sensibilidades, las coberturas, etc. Pensemos que tenemos un modelo de VaR paramétrico con el que medimos los riesgos de los productos valorados con el “modelo A” y sus coberturas, también gestionadas con el “modelo A”. Nuestro modelo de VaR paramétrico, que utiliza como inputs la sensibilidades que proporciona el “modelo A”, nos dice que el VaR es cero, ya que el trader, que también usa las mismas sensibilidades, se ha cubierto perfectamente.

¿Es el riesgo realmente cero?. No, existe un cierto riesgo de modelo que se está escapando a la medición del VaR. ¿Qué pasa si el “modelo A” es erróneo? ¿Qué pasa si aparece un “modelo B” sustituto del “modelo A”? Descubriremos con horror que el MtM ha cambiado (ocasionando una pérdida o beneficio) y que además como las sensibilidades ahora son otras, lo que con el “modelo A” estaba cubierto, con el “modelo B” ya no lo está.

¿Cómo estimar, medir, controlar el riesgo de modelo? La herramienta básica es, en mi opinión, la simulación histórica, hay simular el comportamiento de la gestión del derivado y sus coberturas, en escenarios reales históricos, de forma dinámica, hasta su vencimiento. Si el modelo es bueno, las coberturas replicarán razonablemente al derivado y además tendremos una estimación del riesgo (la diferencia entre el comportamiento de las coberturas y del derivado).

[6] Esta forma de actuar, tiene algunos inconvenientes. El problema de la dimensionalidad, que en la simulación de Montecarlo afectaba exclusivamente vía la cantidad de escenarios que hay que generar, en el caso de la simulación histórica afecta también a la “calidad” del histograma muestral que se usa para generar los escenarios.

¿ES EL VaR UNA BUENA MEDIDA DEL RIESGO?

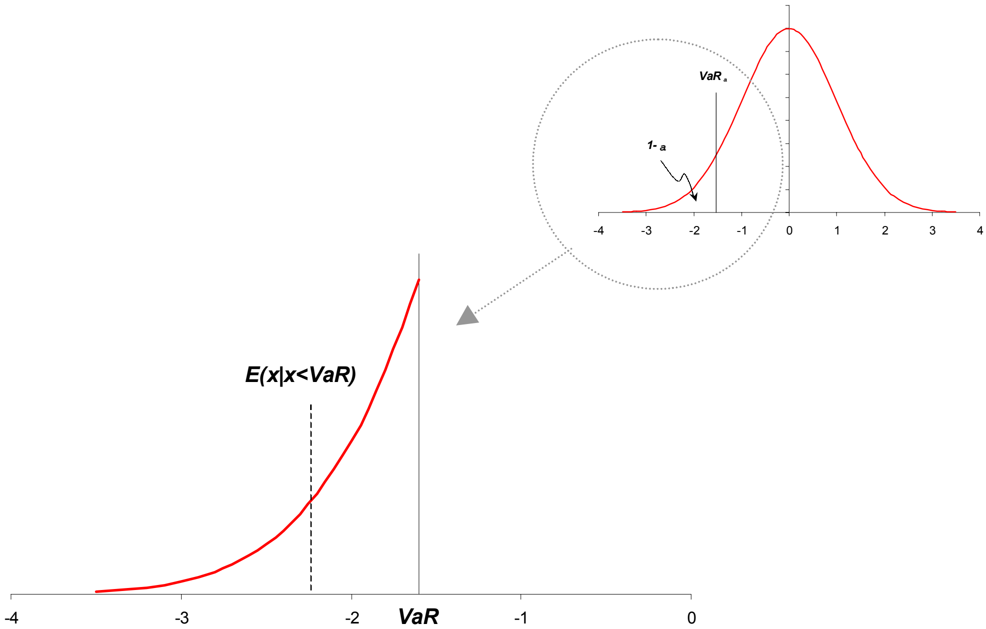
¿Nadie se ha preguntado alguna vez porque medir el riesgo de mercado mediante el VaR? Esto del VaR a priori parece desde luego una buena idea, sin embargo ¿Es la mejor? ¿Hay medidas alternativas?

El VaR nos dice cual es la pérdida máxima con un determinado nivel de confianza y horizonte temporal, pero ¿Si la pérdida es mayor que el VaR, cuanto se debe esperar perder? No es nada difícil imaginar dos distribuciones con igual VaR y, sin embargo, muy diferente "riesgo".

Definición de Shortfall: El Shortfall es la pérdida media esperada condicionada a que se pierde más que el VaR.

$$E(x \mid x < VaR)$$

Es muy sencillo ver gráficamente que significa el Shortfall, no es más que la media de la cola de la distribución.



Existe otra posible interpretación, muy bonita, del shortfall. Imagínese que se desean cubrir las pérdidas superiores al VaR, es decir, se desea comprar un seguro sobre las pérdidas de la cartera con una franquicia igual al VaR. Lo anterior es equivalente comprar una opción sobre la cartera, con strike en el VaR, de manera que si la pérdida de la cartera supera al VaR, el vendedor de la opción entrega la diferencia hasta el VaR. ¿Cuánto costaría dicha opción?

El coste de esta opción es el Shortfall multiplicado por el complementario del nivel de confianza, esto es, la probabilidad de tener una pérdida mayor que el VaR por el valor esperado de dicha pérdida. En el anexo técnico se pueden ver las principales relaciones entre VaR, shortfall y el coste de asegurar las pérdidas superiores al VaR (con y sin franquicia).

En la distribución normal, el shortfall se parece mucho al VaR, conforme los niveles de confianza son cada vez mayores el shortfall converge al VaR. ¿Por qué? Porque la distribución normal tiene una "cola muy delgada", de manera que la media de la cola es muy pequeña, por tanto, si nuestro modelo de VaR es "normal" no tendrá mucho sentido cambiar la medición del riesgo con VaR y pasar a medir con Shortfall.

¿EXISTEN LAS VOLATILIDADES[7] Y LAS CORRELACIONES?

Terminaré mi presentación con una curiosidad que espero de lugar a la reflexión. Voy a plantear la siguiente cuestión. En las series financieras, ¿existen las volatilidades y las correlaciones? La respuesta contra lo que pudiera parecer no es tan obvia. Alguien podría argumentar; "¡Pues claro que si!, y al igual que el movimiento se demuestra andando, dame una serie y yo te diré su volatilidad, dame dos series y te diré su correlación…". Desgraciadamente la respuesta no es tan sencilla.

Voy a centrar la discusión en la volatilidad[8], la volatilidad no es más que una medida del grado de dispersión de una variable aleatoria, y es además una medida de dispersión muy particular, ya que pondera de forma "cuadrática" las distancias. Es perfectamente posible pensar en otras posibles medidas de dispersión alternativas, como las siguientes:

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\bar{x})^2 \cdot f(x)\cdot dx \qquad \hat{\sigma} = \int_{-\infty}^{+\infty} abs(x-\bar{x})\cdot f(x)\cdot dx \qquad \bar{\sigma}^4 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\bar{x})^4 \cdot f(x)\cdot dx$$

La primera definición es la clásica, la segunda y la tercera también miden el grado de dispersión, sin embargo, ponderan de otra forma, en un caso mediante la diferencia respecto a la media en valor absoluto, y en el otro caso mediante la diferencia pero elevada a la cuarta potencia.

¿Porqué se mide la dispersión mediante la clásica volatilidad? Nuevamente, y como en tantas ocasiones, se trata de una cuestión de comodidad, esta forma de medir la dispersión facilita mucho los cálculos[9].

Echémosle un vistazo más detallado a la expresión clásica de la volatilidad y veamos como se puede aproximar mediante suma.

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\bar{x})^2 \cdot f(x)\cdot dx = \lim_{h\to 0}\sum_{i=1}^{n} (\xi_i-\bar{x})^2 \cdot f(\xi_i)\cdot (x_{i+h}-x_i) \; donde \; \xi_i \in [x_{i+h}, x_i]$$

La volatilidad se ve que es la suma de infinitos términos del tipo *$(x-\bar{x})^2$* ponderados por *f(x)*, desde luego, infinitos términos son muchos y cabría preguntarse; ¿Es convergente la serie de infinitas sumas anteriores?, ésta es una condición necesaria para que la volatilidad esté bien definida.

La respuesta depende básicamente de *f(x)*, de la función de distribución. Si conforme *x*, en valor absoluto, se hace más grande, *f(x)* decae hacia cero con mayor rapidez que con la que crece *$(x-\bar{x})^2$* entonces sí habrá convergencia, en otro caso no habrá convergencia.

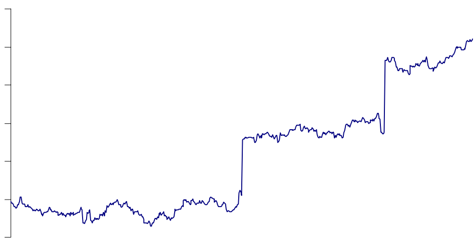
La velocidad con la que decae *f(x)* tiene que ver con el "grosor" de las colas de la distribución. En definitiva, si el grosor de las colas es suficientemente grande, la volatilidad no existirá (será infinita), solo para colas suficientemente delgadas existirá la volatilidad.

[7] Entiéndase volatilidad como sinónimo de desviación estándar, la raíz cuadrada de la varianza.
[8] La discusión sobre la correlación es semejante.
[9] Por ejemplo la función valor absoluto no tiene derivada en el origen, esto complica mucho los cálculos.

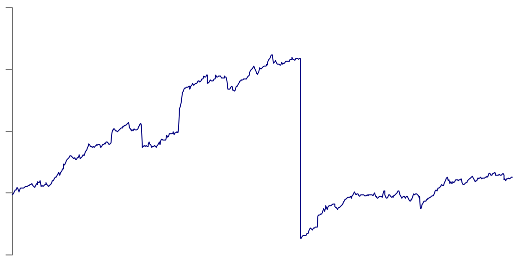
Ya se ha dicho que la distribución normal, tiene colas muy delgadas, sus colas decrecen a la tasa $\frac{1}{\exp(x^2)}$, mucho más rápidamente de lo que crece el término $(x-\bar{x})^2$. Por tanto, si las distribuciones de los rendimientos de los activos financieros fuesen normales no habría problemas, pero ya se ha visto que no es así, que las distribuciones que se observan tienen colas más gruesas que la normal, precisamente el tipo de observación que puede dar lugar a que no esté definida la volatilidad.

Existen estudios en finanzas que han tratado de averiguar si las series de rendimientos tienen o no varianza, para ello lo que se hace básicamente es ver el grosor de las colas. Los resultados, sin embargo, no son concluyentes. Algunas series parecen no tener varianza y otras en cambio si.

Por otro lado también se han desarrollado modelos basados en distribuciones de rendimientos sin varianza. Los gráficos siguientes son un ejemplo del tipo de sendas de precios que se obtienen. ¿No nos resultan familiares?.



¿Posible evolución de un valor tecnológico?



¿Posible evolución del tipo de cambio en un país Emergente?

Este tipo de distribuciones, aunque no tengan varianza, si que tienen VaR (tienen percentiles), y shortfall. Es precisamente en este entorno donde la diferencia entre el VaR y el shortfall se hace más patente. Las colas tan gruesas de este tipo de distribuciones hacen que el shortfall sea mucho mayor que el VaR, es decir, cuando la pérdida supera al VaR lo puede superar por mucho. ¿No nos resulta también familiar esto? Esta posibilidad de pérdidas "muy grandes", pérdidas muy por encima del VaR que se mediría con los supuestos de normalidad, es en el fondo admitir que son posibles las crisis financieras.

CONCLUSIONES

Con esta serie de cuestiones, espero haber aclarado donde creo que estamos actualmente en la medición del riesgo de mercado y hacia donde es posible que se dirijan los desarrollos futuros.

Hacer predicciones es muy difícil, sin embargo, creo que en la medida que la operativa se vaya haciendo más y más compleja, será imposible mantener un VaR basado exclusivamente en modelos paramétricos. Por otro lado, la medición del riesgo de crédito y su integración con el riesgo de mercado, están haciendo que los modelos de simulación se estén empezando a discutir como alternativas factibles, aunque hoy por hoy en entornos de alcance muy limitado. En todo caso creo que antes de poder utilizar la simulación como una herramienta industrial hay que resolver varios problemas, aún abiertos, esencialmente el de la dimensionalidad.

Con un sistema de medición del riesgo de mercado basado en la simulación o mixto (simulación + paramétrico) será ya posible plantearse incorporar relaciones entre los factores más ricas de lo que permite la correlación e incluso también cambiar el tipo de medida del riesgo y pasar por ejemplo del VaR al shortfall.

ANEXO TÉCNICO: VaR, Shortfall y aseguramiento de las pérdidas superiores al VaR

Definición de VaR:

$$VaR_{\alpha} = z \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{z} f(x) \cdot dx = 1-\alpha$$

$$P(x < z) = 1-\alpha$$

Definición de Shortfall:

$$Shortfall = E(x \mid x < VaR) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x \mid x < VaR) \cdot dx = \int_{-\infty}^{VaR} x \cdot \frac{f(x)}{p(x < VaR)} \cdot dx = \int_{-\infty}^{VaR} x \cdot \frac{f(x)}{1-\alpha} \cdot dx$$

$$f(x \mid x < VaR) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{p(x < VaR)} = \dfrac{f(x)}{1-\alpha} & x < VaR \\ 0 & x > VaR \end{cases}$$

Aseguramiento de las pérdidas superiores al VaR

Caso 1

Aseguramiento de las pérdidas superiores al VaR, con una franquicia igual al VaR:

- Si $x<VaR$ el asegurador paga $(VaR-x)$
- Si $x>VaR$ el asegurador paga 0

$$Coste\ del\ Seguro = \int_{-\infty}^{VaR} (VaR - x) \cdot f(x) \cdot dx + \int_{VaR}^{+\infty} (0) \cdot f(x) \cdot dx = VaR \cdot \int_{-\infty}^{VaR} f(x) \cdot dx - \int_{-\infty}^{VaR} x \cdot f(x) \cdot dx =$$

$$VaR \cdot (1-\alpha) - E(x \mid x < VaR) \cdot (1-\alpha) = (VaR - Shortfall) \cdot (1-\alpha)$$

Caso 2

Aseguramiento de las pérdidas superiores al VaR, sin franquicia:

- Si $x<VaR$ el asegurador paga $(-x)$
- Si $x>VaR$ el asegurador paga 0

$$Coste\ del\ Seguro = \int_{-\infty}^{VaR} (-x) \cdot f(x) \cdot dx + \int_{VaR}^{+\infty} (0) \cdot f(x) \cdot dx = -\int_{-\infty}^{VaR} x \cdot f(x) \cdot dx =$$

$$-E(x \mid x < VaR) \cdot (1-\alpha) = (-Shortfall) \cdot (1-\alpha)$$